

Control 3 8/6/2011

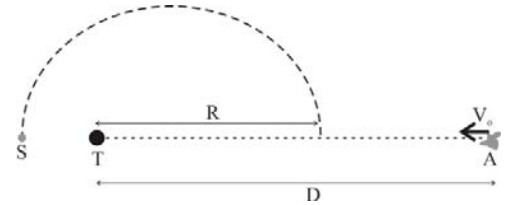
FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2011

Tiempo: 3 Horas

Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Se descubre un asteroide A que a una distancia D de la Tierra se mueve con rapidez V_o derechito hacia ella (ver figura). Afortunadamente, se cuenta con un satélite S que en ese mismo instante se ubica justo al otro lado de la Tierra como muestra la figura. El plan ideado para salvar la Tierra consiste en dar al satélite una órbita elíptica de tal manera que intercepte perpendicularmente la trayectoria del asteroide y choque con él. El objetivo del problema es determinar la excentricidad de la órbita elíptica requerida.

- a) Si $V_o^2 = 2C/D$, determine la distancia del asteroide a la Tierra en función del tiempo ($t=0$ en la condición de la figura). [2 pt]
- b) Determine la distancia R de intercepción suponiendo conocida la excentricidad e de la órbita elíptica del satélite. (Sugerencia: exprese el semieje mayor de la órbita elíptica en función de R y e , y utilice la 3ª Ley de Kepler para determinar el tiempo que el satélite tarda en interceptar al asteroide). [3 pt]
- c) Si en $t=0$ el satélite se encontraba a una distancia $D/5$ de la Tierra, escriba una ecuación algebraica que permita calcular la excentricidad de la órbita requerida (no la resuelva). [1 pt]



Notas:

Asuma que la única atracción gravitacional importante es la terrestre.

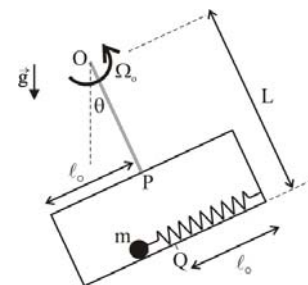
V_o es la rapidez del asteroide sólo en $t=0$.

$C = GM_T$ constante conocida

2. Un recipiente rectangular de ancho basal $2\ell_o$ está soldado a un brazo OP que lo hace girar con velocidad angular constante, Ω_o , en torno a un eje horizontal que pasa por el punto O. La distancia entre el punto O y el fondo del recipiente es L . En el fondo del recipiente una partícula de masa m se encuentra ligada mediante un resorte ideal de constante elástica k y largo natural ℓ_o a uno de los costados del recipiente como muestra la figura. Desprecie todo roce y asuma que se cumple que $\Omega_o^2 = k/m$.

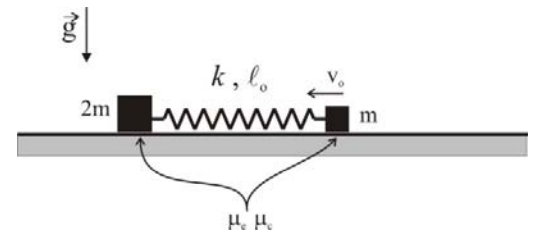
Si en $t=0$ se tiene que $\theta=0$ (eje OP vertical), la partícula está en el punto Q (resorte en su largo natural) y su velocidad relativa al recipiente es nula (reposo relativo), se pide:

- a) Determinar la distancia de la partícula al punto Q en función del tiempo.
- b) Determinar una condición entre Ω_o y L tal que la partícula nunca se separe del fondo del recipiente.



3. Sobre una superficie horizontal se encuentran dos partículas de masas m y $2m$ unidas por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural ℓ_o . En la condición inicial el resorte está en su largo natural, la partícula derecha (masa m) se mueve con rapidez v_o hacia la izquierda y la otra partícula (masa $2m$) está en reposo.

- a) Si los coeficientes de roce estático y cinético entre las partículas y la superficie tienen los valores μ_e y μ_c , respectivamente, se pide determinar el mayor valor que puede tener v_o tal que la partícula de la izquierda nunca se mueva.
- b) Si los coeficientes de roce estático y cinético son ambos nulos determine el mínimo largo que el resorte alcanza en el movimiento resultante del sistema y la frecuencia con que el resorte oscila (considere en este caso que v_o es dato).



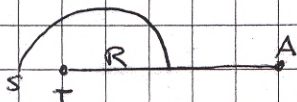
$$m\vec{a}' = \vec{F}_{reales} - m\vec{A}_o - 2m\vec{\Omega}_e \times \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e \times (\vec{\Omega}_e \times \vec{r}') - m\vec{\alpha}_e \times \vec{r}'$$

$$r = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} \cos \theta}$$

$$r = \frac{r_o(1+e)}{1+e \cos \theta}$$

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{c} a^3$$

P1



$$a) \quad \frac{1}{2} v^2 - \frac{C}{r} = \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{C}{D} = 0$$

$$\Rightarrow v = \dot{r} = - \frac{\sqrt{2C}}{r^{1/2}}$$

$$\int_D^r r^{1/2} dr = \int_0^t -\sqrt{2C} dt$$

$$\frac{2}{3} r^{3/2} \Big|_D^r = -\sqrt{2C} t \Rightarrow \boxed{r^{3/2} = D^{3/2} - \frac{3\sqrt{C}}{\sqrt{2}} t}$$

$$b) \quad a = \frac{r_0}{1-e} \quad R = r_0 \frac{(1+e)}{(1-e)} \Rightarrow \boxed{a = \frac{R}{1+e}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} \left(\frac{R}{1+e} \right)^3$$

En la intercepción $t_I = \frac{T}{2}$ $r_{asteroide} = R$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (2t_I)^2 &= \frac{(2\pi)^2 R^3}{C(1+e)^3} \\ R^{3/2} &= D^{3/2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{C} t_I \end{aligned} \right\} \rightarrow t_I = \frac{\pi}{\sqrt{C}} \frac{R^{3/2}}{(1+e)^{3/2}} \quad (*)$$

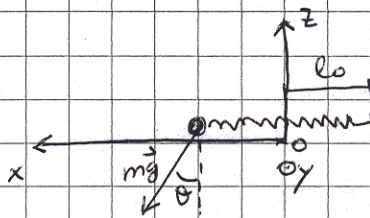
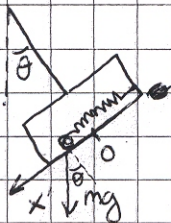
$$\boxed{R^{3/2} = D^{3/2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{C} t_I} \quad (**)$$

$$(*) \text{ en } (**) \rightarrow R^{3/2} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{C} \frac{\pi}{\sqrt{C} (1+e)^{3/2}} \right) = D^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{D}{\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2} (1+e)^{3/2}} \right)^{2/3}}$$

$$c) \quad r_0 = \frac{D}{5} = \frac{(1-e)}{(1+e)} R \Rightarrow \boxed{\frac{(1+e)}{(1-e)} \frac{1}{5} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2} (1+e)^{3/2}} \right)^{2/3}}}$$

(P2)



Fuerzas Reales:

$$N \hat{k}$$

$$mg (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{k})$$

$$\vec{F}_e = -kx \hat{i}$$

Fuerzas ficticias

$$\vec{F}_{\text{inert}} = -mL\Omega_0^2 \hat{k} \quad \vec{F}_{\text{cf}} = m \times \Omega_0^2 \hat{i} \quad \vec{F}_{\text{cor}} = 2m\Omega_0 \dot{x} \hat{k} \quad \vec{F}_f = \vec{0}$$

Ecs. de M to

$$\hat{i}: m \ddot{x} = mg \sin \theta + m \times \Omega_0^2 - kx$$

$$m \ddot{x} = mg \sin \theta + x(m\Omega_0^2 - k) \quad \text{porque } \Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{so } \ddot{x} = g \sin \Omega_0 t$$

$$\dot{x} = \frac{g}{\Omega_0} (1 - \cos \Omega_0 t) \quad \text{(*)} \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$x = \frac{g}{\Omega_0^2} (\pm \Omega_0 - \sin \Omega_0 t) \quad x(0) = 0$$

$$\hat{k}: 0 = N - mg \cos \theta - mL\Omega_0^2 + 2m\Omega_0 \dot{x}$$

usando (*) $\rightarrow N = mg \cos \theta + mL\Omega_0^2 - 2m\Omega_0 \frac{g}{\Omega_0} (1 - \cos \theta)$

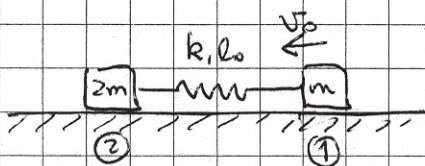
$$N = 3mg \cos \theta + mL\Omega_0^2 - 2mg$$

mínimo N para $\theta = 180^\circ$

$$N_{\text{min}} = -5mg + mL\Omega_0^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_0^2 \geq \frac{5g}{L}$$

P3



a) $|F_{\text{el}}| \leq \mu_e N$

para ② $\Rightarrow k \delta_{\text{max}} = \mu_e 2mg \Rightarrow \delta_{\text{max}} = \frac{\mu_e 2mg}{k}$

para ① $EMT_f - EMT_i = W^{FNC}$

$$\frac{1}{2} k (\delta_{\text{max}})^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_c mg \delta_{\text{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m} \delta_{\text{max}}^2 + \mu_c g \delta_{\text{max}}$$

$$v_0^2 = \left(\frac{k}{m} \frac{\mu_e 2mg}{k} + 2\mu_c g \right) \frac{\mu_e 2mg}{k}$$

$$v_0^2 = 2g(\mu_e + \mu_c) \frac{\mu_e \cdot 2mg}{k} = 4 \mu_e (\mu_e + \mu_c) \frac{mg^2}{k}$$

$$\text{ou } \boxed{v_0 \leq 2g \sqrt{\mu_e (\mu_e + \mu_c) \frac{m}{k}}}$$

b)

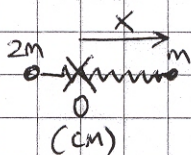
$$EMT = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_{\text{cm}} = \frac{1}{3} v_0 \rightarrow K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} 3m v_{\text{cm}}^2 = \frac{1}{6} m v_0^2$$

$$\Rightarrow K_{\text{el}} + V_{\text{int}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) m v_0^2 = \frac{1}{3} m v_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \delta_{\text{max}}^2 = \frac{1}{3} m v_0^2 \Rightarrow \delta_{\text{max}}^2 = \frac{2}{3} \frac{v_0^2}{k/m}$$

$$L_{\text{min}} = l_0 - \delta_{\text{max}} = l_0 - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{v_0^2}{k/m}}$$



$$M \ddot{x} = -k \left(\frac{3}{2} x - l_0 \right) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{k}{m}}$$